2 Grundzüge der Mengenlehre

In diesem Kapitel wollen wir ein weiteres wichtiges Hilfsmittel der Mathematik, nämlich die Mengenlehre bereitstellen. Wir beginnen dabei mit der Definition des Begriffs „Menge“ und werden anschließend die weiteren Eigenschaften von Mengen behandeln.

2.1 Menge (1874)

Definition 2.1. Eine *Menge A* ist eine Zusammenfassung bestimmter *wohlunterschiedener* Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen, wobei von jedem Objekt eindeutig feststeht, ob es zur Menge A gehört oder nicht.
Die Objekte a, die zur Menge A gehören, heißen Elemente der Menge A und werden mit $a \in A$ bezeichnet.
Objekte b, die nicht zu A gehören, werden als $b \notin A$ gekennzeichnet.

Wissenschaftler 2:
Georg CANTOR, deutscher Mathematiker
(03.03.1845 St. Petersburg - 06.01.1918 Halle (Saale))

2.2 Leere Menge

Definition 2.2. Eine Menge, die KEIN Element enthält, heißt leere Menge und wird mit

$$\{\} \quad (bzw.\ \emptyset)$$

bezeichnet.

ACHTUNG: $\{\emptyset\}$ ist NICHT die leere Menge!

2.3 Mächtigkeit einer Menge

Definition 2.3. Sei A eine Menge.

(i) Falls die Menge A nur endlich viele Elemente enthält, bezeichnen wir mit

$$\#A = \text{Anzahl der Elemente in der Menge } A$$

die sogenannte Mächtigkeit von A.

(ii) Falls die Menge A abzählbar-unendlich viele Elemente enthält, bezeichnen wir die Mächtigkeit mit

$$\#A = \aleph_0. \ (Aleph - Null)$$

(iii) Falls die Menge A mehr Elemente enthält als $\aleph_0$, so heißt sie überabzählbar.

Beispiele zur Mächtigkeit von Mengen

(i) $A = \{\text{rot, gelb, grün}\}$ ist eine endliche Menge.

Es gilt: #A = 3.

(ii) $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ sind abzählbar-unendliche Mengen.

Es gilt: $\#\mathbb{N} = \#\mathbb{Z} = \#\mathbb{Q} = \aleph_0$.

Aber:

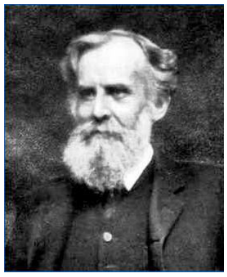
(iii) $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $]0,1[= \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$

sind überabzählbare Mengen.

. Wir werden nun Mengenbeziehungen mittels sogenannter

VENN-Diagramme

visualisieren.



Wissenschaftler 3:
John VENN, britischer Mathematiker
(04.08.1834 Kingston upon Hull - 04.04.1923 Cambridge)

2.4 Teilmenge

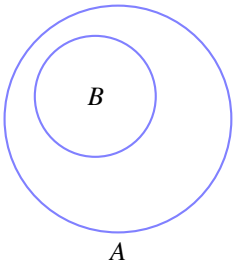


Abbildung 1: Teilmenge

Definition 2.4. Seien A und B zwei Mengen.
Ist jedes Element $b \in B$ auch in A enthalten, so ist B eine Teilmenge von A:

$$B \subset A$$

Manchmal wird auch

$$B \subseteq A$$

geschrieben.

2.5 Gleichheit von Mengen

Definition 2.5. Seien A und B zwei Mengen. Die beiden Mengen A und B heißen gleich, wenn jedes Element von B auch in A enthalten ist und umgekehrt,

$$\text{d. h.} \quad A = B \quad \Leftrightarrow \quad (B \subset A \ \wedge \ A \subset B)$$

Bemerkung:
Mathematische Notation:

$$\wedge = \text{und} \qquad \vee = \text{oder}$$

2.6 Satz

Satz 2.6. *Sei A eine Menge. Dann gilt stets:*

(i) $A \subset A$

(ii) $\{\} \subset A$

2.6.1 Vorbemerkung

Unter der Potenzmenge einer Menge A verstehen wir die *Menge aller Teilmengen von A*.

A	#A	$\mathcal{P}(A)$ = Potenzmenge von A = Menge aller Teilmengen von A	$\#\,\mathcal{P}(A)$
$\{\}$	0	$\{\{\}\} = \{\emptyset\}$	$2^0 = 1$
$\{a\}$	1	$\{\{\}, \{a\}\}$	$2^1 = 2$
$\{a, b\}$	2	$\{\{\}, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$	$2^2 = 4$
$\{a, b, c\}$	3	$\{\{\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$	$2^3 = 8$
$\{a, b, c, d\}$	4	$\{\{\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$	$2^4 = 16$

Tabelle 7: Potenzmenge

2.7 Potenzmenge

Definition 2.7. Sei A eine endliche oder abzählbare Menge.
Die Menge aller Teilmengen von A heißt Potenzmenge von A und wird mit

$$\mathcal{P}(A)$$

bezeichnet.

Satz 2.8. *Sei A eine endliche oder abzählbare Menge.*
Falls A genau n Elemente enthält, so enthält $\mathcal{P}(A)$ *genau* 2^n *Elemente.*

2.9 Schnittmenge

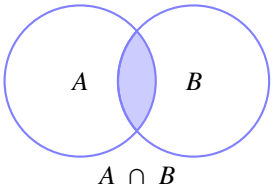


Abbildung 2: Schnittmenge

Definition 2.9. Seien A und B zwei Mengen. Wir bezeichnen mit

$$A \cap B = \{x \mid (x \in A \text{ und } x \in B)\}$$

die Schnittmenge von A und B.

2.10 Disjunkte Mengen

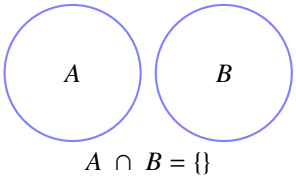


Abbildung 3: Disjunkte Menge

Definition 2.10. Seien A und B zwei Mengen. Wenn

$$A \cap B = \{\},$$

so heißen A und B disjunkt.

2.11 Vereinigungsmenge

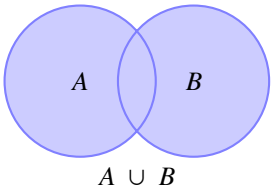


Abbildung 4: Vereinigungsmenge

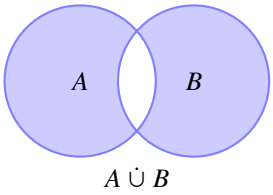
Definition 2.11. Seien A und B zwei Mengen. Wir bezeichnen mit

$$A \cup B = \{x \mid (x \in A \text{ oder } x \in B)\}$$

die Vereinigungsmenge von A und B.

. *Bemerkung*: Hier handelt es sich um das *„einschließende ODER“*.

2.12 Disjunkte Vereinigungsmenge



$A \dot\cup B$

Abbildung 5:
Disjunkte Vereinigungsmenge

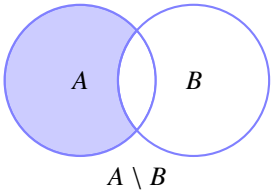
Definition 2.12. Seien A und B zwei Mengen.
Wir bezeichnen mit

$$A \dot\cup B = \{x \mid (\text{entweder } x \in A \text{ oder } x \in B)\}$$

die disjunkte Vereinigungsmenge
von A und B.

. *Bemerkung*: Hier handelt es sich um das „*ausschließende ODER*“.

2.13 Differenzmenge $A \setminus B$



$A \setminus B$

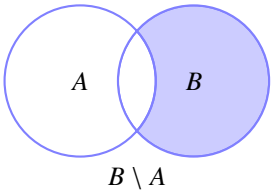
Abbildung 6:
Differenzmenge $A \setminus B$

Definition 2.13. Seien A und B zwei Mengen.
Wir bezeichnen mit

$$A \setminus B = \{x \mid (x \in A \text{ und } x \notin B)\}$$

die Differenzmenge von A und B.

2.14 Differenzmenge $B \setminus A$



$B \setminus A$

Abbildung 7:
Differenzmenge $B \setminus A$

Definition 2.14. Seien A und B zwei Mengen.
Wir bezeichnen mit

$$B \setminus A = \{x \mid (x \in B \text{ und } x \notin A)\}$$

die Differenzmenge von B und A.

2.15 Satz über die disjunkte Vereinigungsmenge

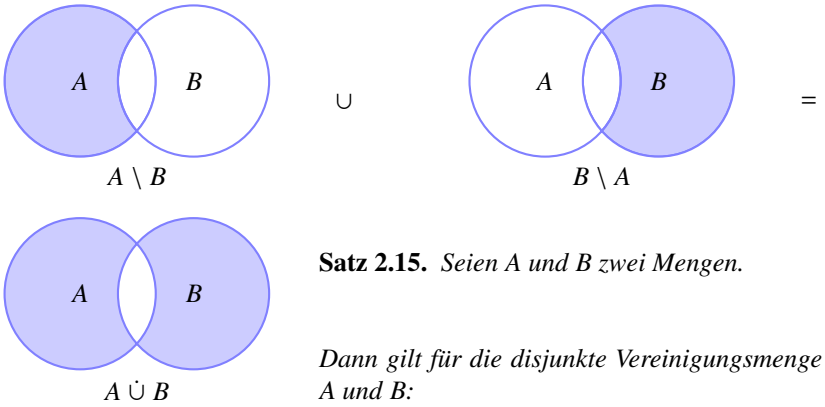


Abbildung 8:
Disjunkte Vereinigung

Satz 2.15. *Seien A und B zwei Mengen.*

Dann gilt für die disjunkte Vereinigungsmenge von A und B:

$$A \dot{\cup} B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

2.15.1 Symbolik der Mengenlehre

In der folgenden Übersicht stellen wir die vier „Sprachen“ zusammen, die zum Verständnis der Symbolik der Mengenlehre gehören.

Deutsch	Lateinisch	Aussagenlogik	Mengenlehre
und	et	$\wedge$	$\cap$
oder (einschließend)	vel	$\vee$	$\cup$
oder (ausschließend)	aut	$\dot{\vee}$	$\dot{\cup}$

Tabelle 8: Symbolik der Mengenlehre

2.16 Tupel

Definition 2.16. Ein n-Tupel ist eine Zusammenfassung von n mathematischen Objekten $x_1, \ldots, x_n$ in einer geordneten Liste.

Anmerkungen:
Im Gegensatz zu Mengen müssen die Objekte dabei nicht notwendigerweise voneinander verschieden sein.

Ihre Reihenfolge ist - anders als bei Mengen - von Bedeutung.

Tupel werden meist mittels runder Klammern $(x_1, \ldots, x_n)$ notiert, wobei zwei aufeinander folgende Objekte durch ein Komma getrennt werden.

Das an der i-ten Stelle stehende Objekt x_i heißt dabei die i-te Komponente des Tupels.

2.17 spezielle Tupel

Definition 2.17. Ein 2-Tupel wird als (geordnetes) Paar bezeichnet.

Ein 3-Tupel heißt Tripel.

Ein 4-Tupel nennt man auch Quadrupel, u.s.w.

Beispiel zur Abgrenzung

(i) $A = \{\text{rot, gelb, grün}\}$, $B = \{\text{gelb, grün, rot}\}$ sind zwei Mengen.

Es gilt: $A = B$.

(ii) $a = (1, 2, 3)$, $b = (2, 3, 1)$ sind zwei Tripel.

Es gilt hier: a $\neq$ b.

2.18 kartesisches Produkt

Definition 2.18. Seien n Mengen $A_1, \ldots, A_n$ gegeben. Dann ist das kartesische Produkt

$A_1 \times \cdots \times A_n$ dieser Mengen definiert als das n-Tupel $(x_1, \ldots, x_n)$, wobei $x_1 \in A_1, \ldots, x_n \in A_n$:

$$A_1 \times \cdots \times A_n = \{ (x_1, \ldots, x_n) \mid x_1 \in A_1, \ldots, x_n \in A_n \}.$$

Dieses kartesische Produkt wird gelesen als „A_1 *kreuz* ... *kreuz* A_n“

Beispiel zum kartesischen Produkt

Seien $A = \{a, b, c\}$ und $B = \{1, 2, 3\}$ gegeben.

Dann gilt: $A \times B = \{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3),(c,1),(c,2),(c,3)\}$.

$B \times A = \{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c),(3,a),(3,b),(3,c)\}$.

Es gilt offensichtlich: $A \times B \neq B \times A$.

2.19 Spezialfall A x ... x A

Definition 2.19. Sei eine Menge A gegeben.

Dann ist das kartesische Produkt $\underbrace{A \times \cdots \times A}_{n-mal}$ dieser Menge definiert als das n-Tupel $(x_1, \ldots, x_n)$, wobei $x_1 \in A, \ldots, x_n \in A$:

$$\underbrace{A \times \cdots \times A}_{n-mal} = A^n = \{ (x_1, \ldots, x_n) \mid x_1 \in A, \ldots, x_n \in A \}.$$

Dieses kartesische Produkt wird gelesen als „ A hoch n“

Wichtiger Spezialfall zum kartesischen Produkt

Häufig betrachtet man das kartesische Produkt der reellen Zahlen mit sich selbst.

Dann gilt:

$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}.$

$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}.$

. Namensgeber des kartesischen Produktes war

Wissenschaftler 4:
René Descartes, französischer Philosoph und Mathematiker
(31.03.1596 La Haye en Touraine - 11.02.1650 Stockholm)